Unabhängige Ereignisse

Was bedeutet es, dass Ereignisse stochastisch unabhängig sind?

Wie kann man diese Unabhängigkeit nachweisen?

Anwendung auf die Berechnung von

UND-Ereignissen und von ODER-Ereignissen

Datei Nr. 32100

Stand 14. März 2018

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Vorwort

Die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen kann man ganz einfach durch eine Formel überprüfen. Doch sollte man gerade in diesem Fall auch ein wenig Verständnis dazu haben, damit man den Hintergrund durchschaut und alle Aufgaben dazu lösen kann. Entscheidend ist, dass man beim Vorliegen eines Baumdiagramms anders vorgeht als bei einer Vierfeldertafel. Daher ist es wichtig, dass man erkennt, wann man in einer Aufgabe zum Baumdiagramm oder zur Vierfeldertafel greift.

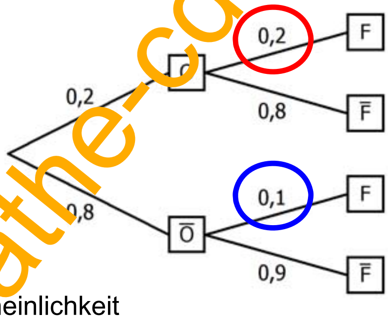
Inhalt

1 Einführungsbeispiel zum Verständnis

In *Krughausen* gibt es eine Töpferei. Dort arbeiten Toni, der Chef, und Franz, sein Lehrling.
Wenn sie Tonkrüge herstellen, dann wird zuerst die Form, also die Oberfläche fertig gemacht, dann kommt die Farbe drauf.

Bei Franz klappt dies noch nicht so ganz, denn er macht noch Fehler.
Der Chef Toni stellt fest, dass es mit den Krügen so aussieht:

Wenn die Oberfläche fehlerhaft ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass Farbfehler auftreten, größer, als bei tadelloser Oberfläche, die dann eher vom Chef stammt. Franz ist eben noch nicht perfekt. Tonis Erfahrungen spiegeln sich in diesem Baumdiagramm wieder:



Wir sollten es interpretieren:

Die (totale) Wahrscheinlichkeit für **Oberflächenfehler O** ist 0,2.

und daher ist $P(\overline{O}) = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit für keinen Oberflächenfehler.

Die Wahrscheinlichkeiten für **Farbfehler F** stehen in der 2. Spalte.

Und da sehen wir gleich, dass es für Farbfehler zweierlei Werte gibt:

Wenn ein Oberflächenfehler vorhanden ist, dann ist mit 20% Wahrscheinlichkeit auch ein Farbfehler vorhanden. Ist die Oberfläche aber in Ordnung (weil der Chef) am Werk war, dann tritt der Farbfehler nur mit 10% Wahrscheinlichkeit auf.

Also ist das Eintreten eines Farbfehlers davon abhängig, ob ein Oberflächenfehler vorhanden ist oder nicht. Wir haben zwei <u>verschiedene bedingte Wahrscheinlichkeiten</u> für das Eintreten eines Farbfehlers:

$P_O(F) = 0{,}2$	Wenn ein Oberflächenfehler vorhanden ist, dann tritt der Farbfehler mit der Wahrscheinlichkeit 20% auf.
$P_{\overline{O}}(F) = 0{,}1$	Wenn kein Oberflächenfehler vorhanden ist, dann tritt der Farbfehler mit der Wahrscheinlichkeit 10% auf.

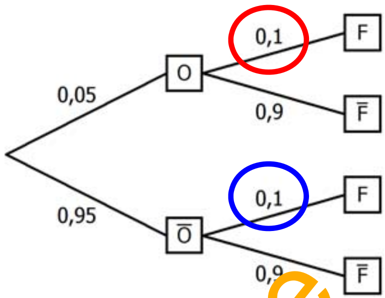
Beobachtung: **Man erkennt also, an diesen beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten, dass die Ereignisse Oberflächenfehler und Farbfehler voneinander abhängig sind.**

Nun kennen wir diese beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten für Farbfehler.
Wir können aber auch die **totale Wahrscheinlichkeit für F** berechnen. Dazu muss man einfach die beiden Pfad-Wahrscheinlichkeiten addieren, die zum Farbfehler gehören:

$$P(F) = 0{,}2 \cdot \boxed{0{,}2} + 0{,}8 \cdot \boxed{0{,}1} = 0{,}04 + 0{,}08 = 0{,}12$$

Nun geht die Geschichte weiter:

Franz, der Lehrling verliert die Lust an seiner Ausbildung und schmeißt alles hin. Also muss der Chef Toni eine Zeit lang alleine seine Krüge herstellen.
Während dieser Zeit sieht das Baumdiagramm so aus:



Weil Toni ein Meister seines Fachs ist, hängen die selten eintretenden Farbfehler nicht davon ab, ob die Oberfläche zweite Wahl ist oder nicht. Man erkennt dies daran, dass jetzt die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten für F gleich groß sind:

$P_O(F) = 0{,}1$	Wenn ein Oberflächenfehler vorhanden ist, dann tritt der Farbfehler mit der Wahrscheinlichkeit 10% auf.
$P_{\overline{O}}(F) = 0{,}1$	Wenn kein Oberflächenfehler vorhanden ist, dann tritt der Farbfehler mit der Wahrscheinlichkeit 10% auf.

Beobachtung: **Man erkennt also, an diesen beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten, dass die Ereignisse Oberflächenfehler und Farbfehler voneinander unabhängig sind.**

Wie wirkt sich das auf die totale Wahrscheinlichkeit für F aus?

Nun, man kann die Antwort ohne weitere Rechnung geben. Da F unabhängig von O ist, sollte die totale Wahrscheinlichkeit denselben Wert 0,1 haben.

Das ist auch schnell nachgerechnet:

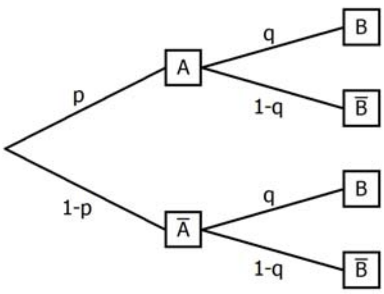
$$P(F) = 0{,}05 \cdot \boxed{0{,}1} + 0{,}95 \cdot \boxed{0{,}1} = (0{,}05 + 0{,}95) \cdot \boxed{0{,}1} = 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$$

(Ich habe zur Vereinfachung 0,1 ausgeklammert.)

Wir halten fest: Im Falle unabhängiger Ereignisse sind die bedingten und die totale Wahrscheinlichkeit gleich groß:

$$P_O(F) = P_{\overline{O}}(F) = P(F)$$

Das gilt immer, wie folgendes Baumdiagramm zeigt:



Man erkennt zuerst, dass B von A unabhängig ist, weil die beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten gleich sind.

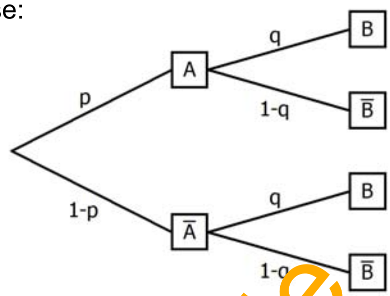
$$P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$$

Und nun berechne ich die totale Wahrscheinlichkeit für B:

$$P(B) = p \cdot q + (1-p) \cdot q = pq + q - pq = q.$$

Sie ist also genauso groß wie die bedingten Wahrscheinlichkeiten.

Es gibt für die Anwendung eine weitere Beziehung, die sehr praktisch ist.



Dazu betrachte ich den allgemeinen Baum für unabhängige Ereignisse:
Man sollte sich daran erinnern, dass jeder Pfad eine Schnittmenge darstellt, also zu einem Und-Ereignis gehört.
Der erste Pfad beschreibt also das Ereignis ***A und B***.

Man schreibt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot \boxed{P_A(B)}$ (1)

bzw. $P(A \cap B) = p \cdot q$

Jetzt kommt der entscheidende Schritt:
Weil A und B unabhängig sind, ist $P_A(B) = P(B)$.
Setzt man das in (1) ein, erhält man diese Gleichung:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot \boxed{P(B)} \quad (2)$$

Diese Gleichung kann man auch in der anderen Richtung verwenden und so argumentieren:

> <u>Wenn</u> $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt, <u>dann</u> sind A und B (stochastisch) unabhängig.

Warum? Nun Gleichung (1) gilt ja immer. Wenn (2) auch noch gilt, dann ist ja $P(B) = P_A(B)$.

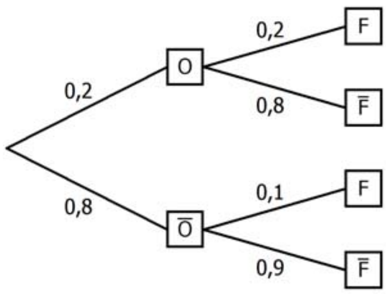
Das Wort „stochastisch" sollte man immer verwenden, denn diese Art von Unabhängigkeit ist ja aus einer Überlegung der Stochastik heraus entstanden. Daneben gibt es andere Überlegungen aus Sachzwängen heraus, die vielleicht zu einer anderen Form der „Unabhängigkeit" führen.

Ausblick: Die Formel (2) ist besonders nützlich, wenn statt eines Baumdiagramms eine Vierfeldertafel gegeben ist.

2 Arbeiten mit der Vierfeldertafel

Wir erstellen zu den beiden Baumdiagrammen der Töpferei Vierfeldertafeln:

Zuerst der Fall, dass Lehrling Franz sein Unwesen treibt und mehr Fehler produziert als Toni.



	F	$\overline{F}$	
O			0,2
$\overline{O}$			0,8

Im Baumdiagramm stehen in der ersten Stufe zwei totale Wahrscheinlichkeiten, diese wurden in die Vierfeldertafel übertragen. Die vier Felder stellen Schnittmengen dar. Ihre Wahrscheinlichkeiten entsprechen den Wahrscheinlichkeiten der vier Pfade. Diese berechne ich jetzt und übertrage sie in die Vierfeldertafel:

$$P(O \cap F) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$$
$$P(O \cap \overline{F}) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$$
$$P(\overline{O} \cap F) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08$$
$$P(\overline{O} \cap \overline{F}) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$$

	F	$\overline{F}$	
O	0,04	0,16	0,2
$\overline{O}$	0,08	0,72	0,8
	0,12	0,88	

Am Ende habe ich noch die totalen Wahrscheinlichkeiten für F und $\overline{F}$ unten angeschrieben.

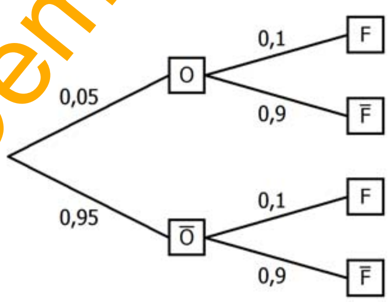
Nun wissen wir ja, dass wegen Franz die Fehler F und O stochastisch abhängig sind.

Dies wollen wir jetzt mit der Formel $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ überprüfen:

$$P(O \cap F) = 0{,}04$$
$$P(O) \cdot P(F) = 0{,}2 \cdot 0{,}12 = 0{,}024$$

Weil $P(O \cap F) \neq P(O) \cdot P(F)$ sind O und F stochastisch abhängig!

Nun schauen wir uns die Vierfeldertafel für den Fall an, dass Toni alleine produziert:



	F	$\overline{F}$	
O	0,005	0,045	0,05
$\overline{O}$	0,095	0,855	0,95
	0,1	0,9	

Hier gilt: $P(O) \cdot P(F) = 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}005 = P(O \cap F)$

Also sind jetzt F und O stochastisch unabhängig.